BTS IG deuxième année
DST de mathématiques

Nom : ______________________________

Prénom : ______________________________

Durée : 2 heures. Les calculatrices sont autorisées, les documents interdits.
Ecrivez toutes les réponses directement sur le sujet.

1. $\boxed{\text{2 points}}$ Est-ce que les propositions $(p \iff q) \iff r$ et $p \iff (q \iff r)$ sont équivalentes ? Vous justifierez votre réponse de façon précise.

Solution: Faisons la table de vérité de $(p \iff q) \iff r$ et $p \iff (q \iff r)$.

p	q	r	$(p \iff q) \iff r$	$p \iff (q \iff r)$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	F
V	F	V	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V
F	F	F	F	F

Comme les colonnes de $(p \iff q) \iff r$ et $p \iff (q \iff r)$ sont les mêmes, alors ces deux propositions sont équivalentes.

2. $\boxed{\text{6 points}}$ Soit $|$ l'opérateur défini comme suit : $p|q$ si et seulement si $\neg(p \wedge q)$. Le but de ces questions est de réecrire les opérateurs $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$ et $\iff$ en n'utilisant que $|$.

   (a) $\boxed{\text{1 point}}$ Donnez la table de vérité de $p|q$

Solution: Faisons la table de vérité de $\neg(p \wedge q)$

p	q	$(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q)$ (ou bien $p\|q$)
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

(b) $\boxed{\text{1 point}}$ Montrer que les propositions $\neg p$ et $p|p$ sont équivalentes.

Solution: $p|p \iff \neg(p \wedge p) \iff \neg p \vee \neg p \iff \neg p$

(c) $\boxed{\text{1 point}}$ Réecrire la proposition $p \wedge q$ en n'utilisant que l'opérateur $|$.

Solution: $p \wedge q \iff \neg\neg(p \wedge q) \iff \neg(p|q) \iff (p|q)|(p|q)$

(d) $\boxed{\text{1 point}}$ Montrer que $p \vee q$ est équivalent à $(p|p)|(q|q)$

Solution: Il suffit de faire une table de vérité, on peut aussi utiliser le fait que $p \vee q \iff \neg\neg(p \vee q) \iff \neg(\neg p \wedge \neg q) \iff \neg((p|p) \wedge (q|q)) \iff (p|p)|(q|q)$

(e) $\boxed{\text{1 point}}$ Réecrire la proposition $p \Rightarrow q$ en n'utilisant que l'opérateur $|$.

Solution: $p \Rightarrow q \iff \neg p \vee q \iff \neg\neg((\neg p) \vee q) \iff \neg(p \wedge \neg q) \iff p|(\neg q) \iff p|(q|q)$

(f) $\boxed{\text{1 point}}$ Réecrire la proposition $p \iff q$ en n'utilisant que l'opérateur $|$.

Solution: $[p \iff q] \iff [(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)] \iff [\neg\neg((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))] \iff [\neg(\neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q))] \iff [(\neg(p \wedge q))|(\neg(\neg p \wedge \neg q))] \iff [(p|q)|((p|p)|(q|q))]$

3. $\boxed{\text{5 points}}$ Rappelons que N est l'ensemble des entiers natuels $\{0, 1, 2, \ldots\}$

(a) $\boxed{\text{1 point}}$ Exprimez la phrase suivante à l'aide d'un prédicat : "il existe un nombre entier naturel inférieur ou égal à tous les nombres entiers naturels".

Solution: $\exists x \in N, \forall y \in N, x \leq y$.

Soit p le prédicat $\forall i \in N, \exists j \in N, i < j$

(b) $\boxed{\text{1 point}}$ Traduisez P en français.

Solution: Tout entier naturel peut être majoré par un autre entier naturel.

(c) $\boxed{\text{2 points}}$ Donnez la valeur de vérité de P, justifiez votre réponse.

Solution: Soit x un entier naturel arbitraire, en prenant $y = x + 1$, on a un entier naturel majorant x.

(d) $\boxed{\text{1 point}}$ Calculez $\neg P$.

Solution: $\exists i \in N, \forall j \in N, i \geq j$

(e) $\boxed{\text{1 point}}$ Déduisez des questions précédentes la valeur de vérité de $\neg P$.

Solution: Comme P est vrai, alors $\neg P$ est faux.

4. $\boxed{\text{6 points}}$ Soient $A = \{1, 3, 5, 6\}$ et $B = \{4, 5, 6\}$. Il vous sera demandé dans les questions qui suivent de donner la liste des éléments de chaque ensemble.

(a) $\boxed{\text{1 point}}$ Calculer $A \cup B$

Solution: $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$

(b) $\boxed{\text{1 point}}$ Calculer $A \cap B$

Solution: $A \cap B = \{5, 6\}$

(c) $\boxed{\text{1 point}}$ Calculer $\{i | (i \in A \wedge i \notin B) \vee (i = 2)\}$

Solution: $\{i | (i \in A \wedge i \notin B) \vee (i = 2)\} = \{1, 2, 3\}$

(d) $\boxed{\text{1 point}}$ Calculer $\{e | e \in A \wedge |e| = 2\}$

Solution: $\{e | e \in A \wedge |e| = 2\} = \emptyset$

(e) $\boxed{\text{1 point}}$ Calculer $\mathcal{P}(\{1\})$

Solution: $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$

(f) $\boxed{\text{1 point}}$ Calculer $\mathcal{P}(\mathcal{P}\{1\}))$

Solution: $\mathcal{P}(\mathcal{P}\{1\})) = \mathcal{P}(\{\emptyset, \{1\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}\}$