BTS IG deuxième année

BTS Blanc de mathématiques

Nom : ____________________

Prénom : ____________________

Durée : 3 heures. Les calculatrices sont autorisées. Les documents sont interdits. **Ecrivez toutes les réponses directement sur le sujet.**

1 Etude d'une fonction rationnelle (9 points)

Soit la fonction $f(x) = 1 - \dfrac{2}{1-x}$

1. $\boxed{\text{1 point}}$ Donner le domaine de définition de f. Nous noterons D_f ce domaine.

Solution: $D_f = \{x | 1 - x \neq 0\}$, or $1 - x \neq 0 \iff 1 \neq x$, donc $D_f = R \setminus \{1\}$.

2. $\boxed{\text{4 points}}$ Calculer les limites suivantes en détaillant le plus possible les réponses.

   (a) $\boxed{\text{1 point}}$ $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$

   Solution: On a $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} 1 - x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim\limits_{X \longrightarrow +\infty} 1 - \dfrac{2}{X}$. Comme $\lim\limits_{X \longrightarrow +\infty} \dfrac{2}{X} = 0^+$, alors $\lim\limits_{X \longrightarrow +\infty} -\dfrac{2}{X} = 0^-$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim\limits_{X \longrightarrow +\infty} 1 - \dfrac{2}{X} = 1^-$.

   (b) $\boxed{\text{1 point}}$ $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$

   Solution: On a $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} 1 - x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim\limits_{X \longrightarrow -\infty} 1 - \dfrac{2}{X}$. Comme $\lim\limits_{X \longrightarrow -\infty} \dfrac{2}{X} = 0^-$, alors $\lim\limits_{X \longrightarrow -\infty} -\dfrac{2}{X} = 0^+$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim\limits_{X \longrightarrow -\infty} 1 - \dfrac{2}{X} = 1^+$.

   (c) $\boxed{\text{1 point}}$ $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x)$

   Solution: On a $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} -x = -1^+$, donc $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} 1 - x = 0^+$. $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \dfrac{2}{1-x} = \lim\limits_{X \longrightarrow 0^+} \dfrac{2}{X} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{X \longrightarrow 0^+} -\dfrac{2}{0^+} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.

   (d) $\boxed{\text{1 point}}$ $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x)$

Solution: On a $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} -x = -1^-$, donc $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} 1 - x = 0^-$. $\lim\limits_{X \longrightarrow 1^+} \dfrac{2}{1-x} = \lim\limits_{X \longrightarrow 0^-} \dfrac{2}{X} = -\infty$. Donc $\lim\limits_{X \longrightarrow 0^+} -\dfrac{2}{0^-} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = +\infty$.

3. $\boxed{\text{1 point}}$ Calculer la dérivée f' de la fonction f.

Solution: f est de la forme $u - 2v$ avec $u(x) = 1$ et $v(x) = \dfrac{1}{1-x}$. On a $u'(x) = 0$ et v est de la forme $\dfrac{1}{w}$ avec $w(x) = 1 - x$. On a $w'(x) = -1$ et $v'(x) = \dfrac{-u'(x)}{u(x)^2} = \dfrac{-(-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$. Donc $f'(x) = u'(x) - 2v'(x) = -\frac{2}{(1-x)^2}$.

4. $\boxed{\text{1 point}}$ Déterminer en fonction de x le signe de f'.

Solution: Pour tout $x \in D_f$, $(1-x)^2$ est positif (car un carré est toujours positif). Donc f' est du signe de -2, donc f' est négatif sur D_f.

5. $\boxed{\text{1 point}}$ En déduire les variations de f sur D_f.

Solution: Comme f' est négatif sur D_f alors f décroît sur D_f.

6. $\boxed{\text{1 point}}$ Représenter graphiquement f.

Solution: Désolé, mais latex ne veut pas me dessiner la courbe... Alors je vous la tracerai au tableau.

2 Probabilités (7 points)

Considérons une chaîne de production formée de deux fraiseuses et d'une broyeuse. Toute pièce passe d'abord par une des deux fraiseuses, puis par la broyeuse. Nous disposons des données suivantes :

– 60% des pièces passe par la première fraiseuse, les autres passent par la deuxième fraiseuse.
– 2% des pièces sont passées par la première fraiseuse et présentent un défaut après le fraisage.
– 1% des pièces sont passées par la deuxième fraiseuse et présentent un défaut après le fraisage.
– toutes les pièces présentant un défaut en entrant dans la broyeuse présentent aussi un défaut en sortant de la broyeuse.

– 3% des pièces ne présentant pas de défaut après le fraisage présentent un défaut en sortant de la broyeuse.

Vous donnerez tous les résultats sous forme de fractions irréductibles.

1. $\boxed{\text{5.5 points}}$ Nous choisissons une pièce au hasard,

   (a) $\boxed{\text{0.5 points}}$ Soit F_1 l'événement "la pièce est passée par la première fraiseuse", calculer $p(F_1)$

   Solution: $p(F_1) = \dfrac{3}{5}$

   (b) $\boxed{\text{0.5 points}}$ Soit F_2 l'événement "la pièce est passée par la deuxième fraiseuse", calculer $p(F_2)$

   Solution: $p(F_2) = 1 - p(F_1) = \dfrac{2}{5}$

   (c) $\boxed{\text{1 point}}$ Soit D_1 l'événement "la pièce présente un défaut après le fraisage", calculer $p(D_1/F_1)$

   Solution: $p(D_1/F_1) = \dfrac{p(D_1 \cap F_1)}{p(F_1)} = \dfrac{0.02}{0.6} = \dfrac{1}{30}$

   (d) $\boxed{\text{0.5 points}}$ calculer $p(D_1/F_2)$

   Solution: $p(D_1/F_2) = \dfrac{p(D_1 \cap F_2)}{p(F_2)} = \dfrac{0.01}{0.4} = \dfrac{1}{40}$.

   (e) $\boxed{\text{1 point}}$ Calculez $p(D_1)$

   Solution: $p(D_1) = p(D_1 \cap F_1) + p(D_1 \cap F_2) = \dfrac{1}{50} + \dfrac{1}{100} = \dfrac{3}{100}$

   (f) $\boxed{\text{0.5 points}}$ Soit D_2 l'événement "la pièce est défaillante après le broyage" (et cela quel que soit l'état de la pièce en sortant du fraisage). Calculez $p(D_2/D_1)$

   Solution: $p(D_2/D_1) = 1$

   (g) $\boxed{\text{0.5 points}}$ Calculez $p(D_2/\bar{D}_1)$

   Solution: $p(D_2/\bar{D}_1) = \dfrac{3}{100}$

(h) $\boxed{\text{1 point}}$ Calculez $p(D_2)$

Solution: $p(D_2) = p(D_2 \cap D_1) + p(D_2 \cap \bar{D}_1) = p(D_2/D_1)p(D_1) + p(D_2/\bar{D}_1)p(\bar{D}_1) = \frac{3}{100} + \frac{3}{100}.\frac{97}{100} = \frac{3}{100}\left(1 + \frac{97}{100}\right) = \frac{3}{100}.\frac{197}{100} = \frac{591}{10000}$.

2. $\boxed{\text{1.5 points}}$ Nous tirons au hasard un lot de 10 pièces **juste après le fraisage**, nous considérerons que les tirages sont indépendants deux à deux . On note X la variable aléatoire "Nombre de pièces sans défaut dans le lot".

(a) $\boxed{\text{0.5 points}}$ Quelle loi de probabilité suit X ? Justifiez votre réponse de façon précise.

Solution: Pour chaque tirage, il y a deux issues "succès" si la pièce ne présente pas de défaut, "échec" sinon. Comme les tirages sont indépendants deux à deux, alors X suit $\mathcal{B}\left(10, \frac{3}{100}\right)$. Donc, pour tout $k \in \{0, \ldots, 10\}$, on a

$$p(X = k) = \mathcal{C}_{10}^{k} \left(\frac{3}{100}\right)^{k} \left(\frac{97}{100}\right)^{10-k}$$

(b) $\boxed{\text{1 point}}$ Quelle est la probabilité qu'exactement une pièce présente un défaut ? Est-elle inférieure ou supérieure à 10^{-12} ?

Solution: $p(X = 9) = p(X = 9) = \mathcal{C}_{10}^{9} \left(\frac{3}{100}\right)^{9} \left(\frac{97}{100}\right)^{10-9} = 10.\left(\frac{3}{100}\right)^{9} \left(\frac{97}{100}\right) = \frac{97}{10}\left(\frac{3}{100}\right)^{9} = \frac{3^9 \times 297}{10 \times 100^9} = \frac{5845851}{10^{19}} < \frac{10^7}{10^{19}} = 10^{-12}$

3 Matrices (4 points)

Votre neveu, à qui vous avez demandé de fabriquer des rallonges téléphoniques à quatre broches, a malencontreusement mélangé les fils. Il y a envoyé le premier fil sur le deuxième, le deuxième sur le quatrième, le quatrième sur le premier et le troisième sur lui-même. Lorsque vous envoyez dans les quatre broches quatre signaux électriques e_1, e_2, e_3 et e_4, que l'on représente par le vecteur $v = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}$, vous récupérez en sortie les signaux $v_1 = \begin{pmatrix} e_4 \\ e_1 \\ e_3 \\ e_2 \end{pmatrix}$.

1. $\boxed{\text{1 point}}$ Calculez le produit matriciel

$$Mv = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}$$

Solution:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_4 \\ e_1 \\ e_3 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

2. $\boxed{\text{1 point}}$ Qu'observez-vous ?

Solution: En multipliant le vecteur des signaux en entrée par M, on obtient les signaux de sortie, cela signifie que la multiplication par M modélise la permutation opérée par le câble.

3. $\boxed{\text{1 point}}$ Calculez M^3.

Solution: $M^3 = I$.

4. $\boxed{\text{1 point}}$ Etant donnée l'urgence de la situation, est-il possible d'obtenir un câble droit en branchant plusieurs rallonges les unes derrières les autres ?

Solution: Le passage d'un signal v dans trois rallonges donne le signal $M^3 v = Iv = v$, à savoir le signal d'origine. Il suffit donc de brancher trois câbles bout à bout.

4 Formulaire partiel

Loi binomiale

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k} \qquad \text{où} \qquad C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}; \qquad E(X)=np \quad ; \quad \sigma(X)=\sqrt{npq}$$

Limites usuelles

Si $\alpha>0$, $\lim_{t\to 0} t^\alpha=0$
Si $\alpha<0$, $\lim_{t\to 0} t^\alpha=+\infty$
Si $\alpha>0$, $\lim_{t\to +\infty} t^\alpha=+\infty$
Si $\alpha<0$, $\lim_{t\to +\infty} t^\alpha=0$

Dérivées et primitives

$(u+v)'=u'+v'$	$(v\circ u)'=(v'\circ u)\,u'$
$(ku)'=ku'$	$(e^u)'=e^u u'$
$(uv)'=u'v+uv'$	$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives
$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$	$(u^a)'=\alpha u^{a-1}u'$
$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{u^2}$	