

BTS IG deuxième année  
DST de mathématiques

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Durée : 2 heures. Les calculatrices sont autorisées. Les documents sont interdits. **Ecrivez toutes les réponses directement sur le sujet.** Sauf mention explicite du contraire, vous donnerez tous les résultats sous forme de fractions irréductibles. Vous trouverez en annexe les valeurs prises par la fonction de répartition de la loi normale.

Marcel vient boire un verre 4 soirs sur 7 chez Gérard. Gérard boit du Pastis 3 fois sur 4 quand Marcel est présent et 2 fois sur 3 quand Marcel n'est pas là.

1. 8 points Considérons un soir au hasard, soit  $M$  l'événement "Marcel est venu boire un verre ce soir" et  $P$  l'événement "Gérard a pris du Pastis".
- (a) 3 points Déterminez à partir de l'énoncé les probabilités suivantes :  $p(M)$ ,  $p(P/M)$  et  $p(P/\bar{M})$ .

**Solution:**  $p(M) = \frac{4}{7}$ ,  $p(P/M) = \frac{3}{4}$ ,  $p(P/\bar{M}) = \frac{2}{3}$

- (b) 2 points Calculez les probabilités suivantes :  $p(P \cap M)$  et  $p(P \cap \bar{M})$ .

**Solution:**  $p(P \cap M) = p(P/M)p(M) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$ ,  $p(P \cap \bar{M}) = p(P/\bar{M})p(\bar{M}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2}{7}$ .

- (c) 3 points Calculez les probabilités suivantes :  $p(P)$ ,  $p(M/P)$  et  $p(M/\bar{P})$ .

**Solution:**  $p(P) = p(P \cap M) + p(P \cap \bar{M}) = \frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$ ,  
 $p(M/P) = \frac{p(M \cap P)}{p(P)} = \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{5} = \frac{3}{5}$ .  $p(M/\bar{P}) = \frac{p(M \cap \bar{P})}{p(\bar{P})} = \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$ .

2. 4 points Germaine, la femme de Gérard, parie avec lui que Marcel ne viendra pas ce soir. Si Germaine gagne le pari, donc si Marcel ne vient pas, Gérard devra la laisser vider dans l'évier tout son stock de Pastis, dont la valeur totale est de 300 euros. Si Gérard gagne, elle devra se séparer de son téléphone portable pendant 72 heures, lui faisant ainsi économiser 240 euros sur la prochaine facture. Soit  $X$  la variable aléatoire : "somme gagnée par Gérard" (cette somme peut bien entendu être négative)

- (a) 2 points Donnez la loi de probabilité de  $X$ .

**Solution:**  $X$  peut prendre les valeurs 240 et  $-300$ .  $X = 240$  si Gérard gagne, donc si Marcel vient, d'où  $p(X = 240) = p(M) = 4/7$ . De ce fait  $p(X = -300) = 1 - 4/7 = 3/7$ .

- (b) 2 points Calculez l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de  $X$ . Vous donnerez la variance sous forme décimale arrondie à  $10^{-2}$ .

**Solution:**  $E(X) = \frac{240 * 4}{7} - \frac{300 * 3}{7} = \frac{960 - 900}{7} = \frac{60}{7}$ .  
 $V(X) = \frac{4}{7}(240 - \frac{60}{7})^2 + \frac{3}{7}(300 + \frac{60}{7})^2 = \frac{4}{7 * 49}(1620)^2 + \frac{3}{7 * 49}(2160)^2 = \frac{1}{434}(4.2624400 + 3.4665600) = \frac{1}{434}(10497600 + 7873200) = \frac{18370800}{434} = 42329.03$ ,  $\sigma(X) = \sqrt{42329.03} = 205.74$ .

3. 8 points Gérard, après avoir perdu son pari, a dissimulé dans le garage des bouteilles de Pastis. Chaque fois que sa femme utilise le téléphone, il attend exactement une minute puis va boire dans le garage pendant exactement 13 minutes. Le temps moyen pris par Germaine pour téléphoner suit  $\mathcal{N}(20, 10)$ . A chaque fois que Germaine raccroche, elle va vérifier ce que fait Gérard dans le garage. Si Gérard se fait surprendre en train de boire, la bouteille en cours d'utilisation part immédiatement dans l'évier, faisant perdre 15 euros à Gérard. (Vous arrondirez dorénavant les résultats à  $10^{-4}$ )

- (a) 2 points Choisissons une communication téléphonique arbitraire, quelle est la probabilité que Gérard soit surpris le verre à la main après cette communication ?

**Solution:** Gérard se fera surprendre si Germaine passe moins de 14 minutes au téléphone. Soit  $Y$  le temps passé par Germaine au téléphone.  $Y$  suit une loi normale de paramètres

$(20, 10)$ , donc  $\frac{Y - 20}{10}$  suit une loi normale centrée réduite.  
 On a  $p(Y < 14) = p\left(\frac{Y - 20}{10} < \frac{-6}{10}\right) = p\left(\frac{Y - 20}{10} > 0.6\right) = 1 - p\left(\frac{Y - 20}{10} < 0.6\right)$ . On lit dans la table  $p\left(\frac{Y - 20}{10} < 0.6\right) = 0.7257$ , donc  $p(Y < 14) = 1 - 0.7257 = 0.2743$ .

- (b) **2 points** Gérard sait que Germaine va téléphoner 7 fois aujourd'hui. Les durées des communications sont toutes indépendantes 2 à 2. Soit  $Z$  la variable aléatoire "nombre de bouteilles vidées dans l'évier", donner la loi de probabilité de  $Z$ . Quelle est la probabilité que Gérard se fasse surprendre au moins une fois ?

**Solution:** Comme les durées sont indépendantes 2 à 2 et que chacune des 7 communications téléphoniques peut se solder par un succès (pastis dans l'évier) ou un échec, le nombre de succès  $Z$  suit une loi  $\mathcal{B}(7, 0.2743)$ . Donc pour tout  $k \in \{0, \dots, 7\}$ ,  $p(Z = k) = \mathcal{C}_7^k 0.2743^k 0.7257^{7-k}$ . La probabilité que Gérard se fasse surprendre au moins une fois est donnée par  $p(Z > 0) = 1 - p(Z = 0) = 1 - 0.7257^7 = 1 - 0.106 = 0.894$

- (c) **1 point** Donner l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de  $Z$ .

**Solution:** On a  $E(Z) = np = 7 \times 0.2743 = 1.9201$ ,  $V(Z) = np(1 - p) = 1.9201 \times 0.7257 = 1.3934$  et  $\sigma(Z) = \sqrt{1.3934} = 1.1804$

- (d) **1 point** Soit  $U$  la variable aléatoire "prix du pastis vidé dans l'évier pendant la journée", exprimer  $U$  en fonction de  $Z$ . Donner l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de  $U$ .

**Solution:** On a  $U = 15Z$ , donc  $E(U) = 15.E(Z) = 15 \times 1.9201 = 28.8015$ ,  $V(U) = 15^2 V(Z) = 225 \times 1.3934 = 313.5188$  et  $\sigma(U) = 15\sigma(Z) = 15 \times 1.1804 = 17.706$

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000